Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo III–Curso 2019

Primer parcial

Lunes 13 de mayo de 2019

Comienzo: 8:30

Finalización: 11:30

§A. 1) Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+nx^2)\sqrt{n}}$.

2) Mostrar que la ecuación $z^3 - z - xy \operatorname{sen} z = 0$ define implícitamente a z como función de x e y, $z = f(x, y)$, en un entorno del origen. Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.

3)
- Calcular $\int_C \frac{x+y}{y+z} ds$, donde C está parametrizado por $\gamma(t) = (t, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}, t)$, $t \in [0, 1]$.
- Calcular $\int_C (y, z, xy) \cdot ds$, donde C es la hélice dada por $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ tal que $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$.

20 puntos

§B. Se considera $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = e^{-at}(\cos t, \operatorname{sen} t)$, donde $a > 0$. Sea L la longitud de $\gamma|_{[0,2\pi]}$.

1) Bosquejar la imagen, $\mathcal{E}$, de γ, y probar que es una variedad de clase C^∞ para la cual γ es una parametrización (probar que γ es un homeomorfismo sobre $\mathcal{E}$ mostrando que si $\gamma(t) = (x, y)$, entonces $t = -\frac{1}{a} \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$).

2) Hallar los puntos de $\mathcal{E}$ en los cuales el espacio tangente es la recta de ecuación $x + ay = 0$.

3) Calcular L, y expresar la longitud de $\gamma|_{[c,c+2\pi]}$ en función de L, $\forall c \in \mathbb{R}$.

20 puntos

Soluciones

§A. 1) Se tiene, para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leqslant \frac{x^2}{(1+nx^2)\sqrt{n}} = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{(1+nx^2)\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{n}(1+nx^2)}{(1+nx^2)\sqrt{n}} - \frac{1}{n(1+nx^2)\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}},$$

y como $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ es convergente, entonces el criterio M de Weierstrass implica que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^2}{(1+nx^2)\sqrt{n}}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

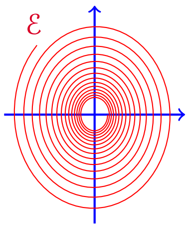
2) Sea $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $G(x, y, z) = z^3 - z - xy \operatorname{sen} z$. Entonces $G(0, 0, 0) = 0$, y $\frac{\partial G}{\partial z}(x, y, z) = 3z^2 - 1 - xy \cos z$. Luego $\frac{\partial G}{\partial z}(0, 0, 0) = -1 \neq 0$. Entonces, por el teorema de la función implícita existen entornos U de $(0, 0)$ y V de 0, y una función $f : U \to V$, única que satisface $G(x, y, f(x, y)) = 0 \ \forall (x, y) \in U$, y además f es de clase C^∞ pues G lo es. Como $0 = f(x, y)^3 - f(x, y) - xy \operatorname{sen}(f(x, y)) \ \forall (x, y) \in U$, entonces si $(x, y) \in U$:

$$0 = 3\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) f(x, y)^2 - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y \operatorname{sen}(f(x, y)) - xy \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cos(f(x, y)).$$

La igualdad anterior se cumple en particular para $(x, y) = (0, 0)$, y como $f(0, 0) = 0$, se concluye $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

3)
- $\int_C \frac{x+y}{y+z} ds = \int_0^1 \frac{t(1+\frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}})}{t(1+\frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}})} \sqrt{1+t+1}\, dt = \frac{2}{3}(t+2)^{3/2}\Big|_0^1 = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{8}.$
- $\int_C (y, z, xy) \cdot ds = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t, t, \operatorname{sen} t \cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1) dt$
  $= \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^2 t + t \cos t + \operatorname{sen} t \cos t\, dt = -\pi + t \operatorname{sen} t\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t\Big|_0^{2\pi} = -\pi$

§B. 1) La imagen $\mathcal{E} = \gamma(\mathbb{R})$ de γ es una espiral (logarítmica):



Si $\gamma(t) = (x, y)$, entonces $\sqrt{x^2 + y^2} = \|\gamma(t)\| = e^{-at}$, de donde $t = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. Por lo tanto γ es una función continua biyectiva cuya inversa (que es precisamente la restricción de $\frac{1}{a} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ a $\mathcal{E}$), también es continua, es decir, es un homeomorfismo sobre $\mathcal{E}$. Por otro lado se tiene $\gamma'(t) = e^{-at}(-a \cos t - \operatorname{sen} t, -a \operatorname{sen} t + \cos t)$, de modo que $\|\gamma'(t)\| = e^{-at}\sqrt{1 + a^2}$. Se concluye entonces que γ es una inmersión, que es de clase C^∞ porque las funciones trigonométricas y la exponencial lo son.

2) De acuerdo a la expresión hallada más arriba para la derivada de γ, resulta que $\gamma'(t)$ está en la recta $x + ay = 0$ si y sólo si $0 = -a \cos t - \operatorname{sen} t - a^2 \operatorname{sen} t + a \cos t = -(1 + a^2) \operatorname{sen} t = 0$, lo cual ocurre si y sólo si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $t = t_k := k\pi$, en cuyo caso es $\cos t_k = (-1)^k$. Por lo tanto el conjunto de puntos buscados es

$$\{e^{-ak\pi}((-1)^k, 0) : k \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{E} \cap Ox.$$

3) Como $\|\gamma'(t)\| = e^{-at}\sqrt{1+a^2}$, se tiene

$$\ell(\gamma|_{[c,d]}) = \sqrt{1+a^2}\int_c^d e^{-au}du = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{-ac} - e^{-ad}).$$

En particular $L = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(1 - e^{-2a\pi})$, y entonces $\ell(\gamma|_{[c,c+2\pi]}) = e^{-ac}L$.